Exemples de mouvements caractéristiques des principales forces

Julien Cubizolles

Lycée Louis le Grand

Mercredi 12 janvier 2022

Exemples de mouvements caractéristiques des principales forces

Julien Cubizolles

Lycée Louis le Grand

Mercredi 12 janvier 2022

- caractéristiques des mouvements générés par des forces usuelles

- caractéristiques des mouvements générés par des forces usuelles
- techniques de calcul et résultats généraux à savoir adapter pour des forces similaires en identifiant les paramètres essentiels.

- caractéristiques des mouvements générés par des forces usuelles
- techniques de calcul et résultats généraux à savoir adapter pour des forces similaires en identifiant les paramètres essentiels.

- caractéristiques des mouvements générés par des forces usuelles
- techniques de calcul et résultats généraux à savoir adapter pour des forces similaires en identifiant les paramètres essentiels.

on se placera dans $\mathscr{R}_{\mathrm{T}}$ considéré galiléen.

Observations

- Un fil doit être tendu pour maintenir immobile un PM dans $\mathscr{R}_{\mathrm{T}}$.

Observations

- Un fil doit être tendu pour maintenir immobile un PM dans $\mathscr{R}_{\mathrm{T}}$.
- Le fil exerce la tension $\vec{T}$, le PM doit donc être soumis à une autre force, $\vec{P}$, que $\vec{T}$ compense : $\vec{P}+\vec{T}=\vec{0}$.

Observations

- Un fil doit être tendu pour maintenir immobile un PM dans $\mathscr{R}_{\mathrm{T}}$.
- Le fil exerce la tension $\overrightarrow{T}$, le PM doit donc être soumis à une autre force, $\overrightarrow{P}$, que $\overrightarrow{T}$ compense : $\overrightarrow{P}+\overrightarrow{T}=\overrightarrow{0}$.
- On constate que $\overrightarrow{P}$ est proportionnelle à m.

Poids dans $\mathscr{R}_\mathrm{T}$

Définition (Poids dans $\mathscr{R}_\mathrm{T}$)

On définit le poids, noté $\vec{P}$ d'un point matériel comme l'opposé de la force qu'un opérateur doit lui appliquer pour le maintenir immobile dans le référentiel terrestre $\mathscr{R}_\mathrm{T}$.
On définit le champ de pesanteur, d'accélération notée $\vec{g}$ tel que, pour tout point matériel :

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

La direction locale de $\vec{g}$ définit la verticale descendante, un plan est dit horizontal s'il est orthogonal à $\vec{g}$.
L'accélération $\vec{g}$ est localement uniforme avec $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Poids dans $\mathscr{R}_\mathrm{T}$

Définition (Poids dans $\mathscr{R}_\mathrm{T}$)

On définit le poids, noté $\vec{P}$ d'un point matériel comme l'opposé de la force qu'un opérateur doit lui appliquer pour le maintenir immobile dans le référentiel terrestre $\mathscr{R}_\mathrm{T}$.
On définit le champ de pesanteur, d'accélération notée $\vec{g}$ tel que, pour tout point matériel :

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

La direction locale de $\vec{g}$ définit la verticale descendante, un plan est dit horizontal s'il est orthogonal à $\vec{g}$.
L'accélération $\vec{g}$ est localement uniforme avec $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

- $\vec{P}$ principalement dû à l'attraction gravitationnelle, mais possède une composante non galiléenne

Poids dans $\mathscr{R}_{\mathrm{T}}$

Définition (Poids dans $\mathscr{R}_{\mathrm{T}}$)

On définit le poids, noté $\vec{P}$ d'un point matériel comme l'opposé de la force qu'un opérateur doit lui appliquer pour le maintenir immobile dans le référentiel terrestre $\mathscr{R}_{\mathrm{T}}$.
On définit le champ de pesanteur, d'accélération notée $\vec{g}$ tel que, pour tout point matériel :

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

La direction locale de $\vec{g}$ définit la verticale descendante, un plan est dit horizontal s'il est orthogonal à $\vec{g}$.
L'accélération $\vec{g}$ est localement uniforme avec $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

- $\vec{P}$ principalement dû à l'attraction gravitationnelle, mais possède une composante non galiléenne
- $|\vec{g}(M_2) - \vec{g}(M_1)| \ll g$ pour $M_1M_2 \ll R_T \simeq 6400\,\mathrm{km}$

Poids dans $\mathscr{R}_\mathrm{T}$

Définition (Poids dans $\mathscr{R}_\mathrm{T}$)

On définit le poids, noté $\vec{P}$ d'un point matériel comme l'opposé de la force qu'un opérateur doit lui appliquer pour le maintenir immobile dans le référentiel terrestre $\mathscr{R}_\mathrm{T}$.
On définit le champ de pesanteur, d'accélération notée $\vec{g}$ tel que, pour tout point matériel :

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

La direction locale de $\vec{g}$ définit la verticale descendante, un plan est dit horizontal s'il est orthogonal à $\vec{g}$.
L'accélération $\vec{g}$ est localement uniforme avec $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

- $\vec{P}$ principalement dû à l'attraction gravitationnelle, mais possède une composante non galiléenne
- $|\vec{g}(M_2) - \vec{g}(M_1)| \ll g$ pour $M_1M_2 \ll R_T \simeq 6400\,\mathrm{km}$
- On parle de « champ de pesanteur » car $\vec{P}/m = \vec{g}$ défini en tout point, indépendamment de la masse du PM qui subit $\vec{P}$.

Chute libre dans le vide

Chute libre dans le vide

Le mouvement d'un point matériel dans le vide dans le champ de pesanteur d'accélération $\vec{g}$ est plan et la trajectoire est une parabole dirigée par la verticale descendante.
Il est indépendant de la masse du point matériel.

Chute libre dans le vide

Chute libre dans le vide

Le mouvement d'un point matériel dans le vide dans le champ de pesanteur d'accélération $\vec{g}$ est plan et la trajectoire est une parabole dirigée par la verticale descendante.
Il est indépendant de la masse du point matériel.

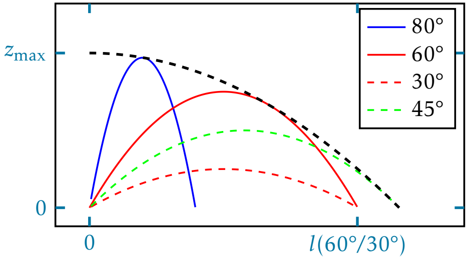
$$z - \underbrace{\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}}_{\equiv z_S} = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \left(x - \underbrace{\frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}}_{\equiv x_S} \right)^2$$

Flèche et portée

- la flèche est l'altitude maximale atteinte selon z :
  $z_{\text{max}} = v_0^2 \sin(\alpha)^2/(2g)$, évidemment maximale pour $\alpha = \pi/2$
- la portée est la distance maximale réalisable selon x :
  $l \equiv x(z=0) = 2x_s = \dfrac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$:

Flèche et portée

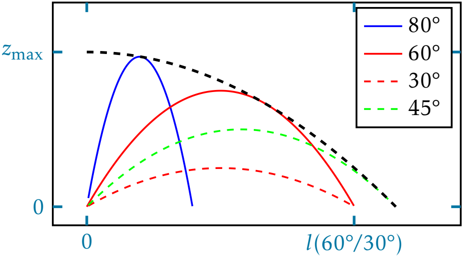
- la flèche est l'altitude maximale atteinte selon z : $z_{\text{max}} = v_0^2 \sin(\alpha)^2/(2g)$, évidemment maximale pour $\alpha = \pi/2$
- la portée est la distance maximale réalisable selon x : $l \equiv x(z=0) = 2x_s = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$:
- la portée est maximale en l_{max} pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$



Flèche et portée

- la flèche est l'altitude maximale atteinte selon z : $z_{\text{max}} = v_0^2 \sin(\alpha)^2/(2g)$, évidemment maximale pour $\alpha = \pi/2$
- la portée est la distance maximale réalisable selon x : $l \equiv x(z=0) = 2x_s = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$:

- la portée est maximale en l_{max} pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$
- pour $l < l_{\text{max}}$, il existe deux valeurs de α qui réalisent l.



Influence de l'angle initial

- http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/R.F.D/chute1.php
- http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/parasecu.html

Frottement fluide

Définition (Force de frottement fluide)

Une force de frottement est dite fluide si son intensité varie avec le module $|\vec{v}|$ de la vitesse, noté v. On peut alors l'écrire sous la forme :

$$\vec{f} = -K(v)\frac{\vec{v}}{v},$$

avec $K(v)$ une fonction positive de v, la plupart du temps croissante quand v est croissant, nulle pour $v = 0$.

- nulle pour $v = 0$, *ie* PM au repos par rapport au milieu, il reste cependant la poussée d'Archimède

Frottement fluide

Définition (Force de frottement fluide)

Une force de frottement est dite fluide si son intensité varie avec le module $|\overrightarrow{v}|$ de la vitesse, noté v. On peut alors l'écrire sous la forme :

$$\overrightarrow{f} = -K(v)\frac{\overrightarrow{v}}{v},$$

avec $K(v)$ une fonction positive de v, la plupart du temps croissante quand v est croissant, nulle pour $v = 0$.

- nulle pour $v = 0$, *ie* PM au repos par rapport au milieu, il reste cependant la poussée d'Archimède
- f a pour origine les interactions avec les molécules du fluide, caractérisée par la viscosité du fluide.

Frottement fluide

Définition (Force de frottement fluide)

Une force de frottement est dite fluide si son intensité varie avec le module $|\overrightarrow{v}|$ de la vitesse, noté v. On peut alors l'écrire sous la forme :

$$\overrightarrow{f} = -K(v)\frac{\overrightarrow{v}}{v},$$

avec $K(v)$ une fonction positive de v, la plupart du temps croissante quand v est croissant, nulle pour $v=0$.

- nulle pour $v=0$, *ie* PM au repos par rapport au milieu, il reste cependant la poussée d'Archimède
- f a pour origine les interactions avec les molécules du fluide, caractérisée par la viscosité du fluide.
- à v fixée f croît avec :

Frottement fluide

Définition (Force de frottement fluide)

Une force de frottement est dite fluide si son intensité varie avec le module $|\overrightarrow{v}|$ de la vitesse, noté v. On peut alors l'écrire sous la forme :

$$\overrightarrow{f} = -K(v)\frac{\overrightarrow{v}}{v},$$

avec $K(v)$ une fonction positive de v, la plupart du temps croissante quand v est croissant, nulle pour $v = 0$.

- nulle pour $v = 0$, *ie* PM au repos par rapport au milieu, il reste cependant la poussée d'Archimède
- f a pour origine les interactions avec les molécules du fluide, caractérisée par la viscosité du fluide.
- à v fixée f croît avec :
  - viscosité

Frottement fluide

Définition (Force de frottement fluide)

Une force de frottement est dite fluide si son intensité varie avec le module $|\vec{v}|$ de la vitesse, noté v. On peut alors l'écrire sous la forme :

$$\vec{f} = -K(v)\frac{\vec{v}}{v},$$

avec $K(v)$ une fonction positive de v, la plupart du temps croissante quand v est croissant, nulle pour $v = 0$.

- nulle pour $v = 0$, *ie* PM au repos par rapport au milieu, il reste cependant la poussée d'Archimède
- f a pour origine les interactions avec les molécules du fluide, caractérisée par la viscosité du fluide.
- à v fixée f croît avec :
  - viscosité
  - section du cylindre engendré par le déplacement du PM

- équation différentielle non linéaire : résolution analytique pas forcément possible

- équation différentielle non linéaire : résolution analytique pas forcément possible
- on peut cependant déterminer certaines caractéristiques du mouvement sans résoudre l'équadiff

- équation différentielle non linéaire : résolution analytique pas forcément possible
- on peut cependant déterminer certaines caractéristiques du mouvement sans résoudre l'équadiff

- équation différentielle non linéaire : résolution analytique pas forcément possible
- on peut cependant déterminer certaines caractéristiques du mouvement sans résoudre l'équadiff

Vitesse limite

Un point matériel placé dans un champ de forces $\vec{P}$ uniforme et soumis à une force de frottement fluide acquiert asymptotiquement une vitesse dite limite de même direction et sens que $\vec{P}$.

on détermine également le temps caractéristique d'évolution du système.

Deux cas limites suivant la taille de l'objet, sa vitesse et la viscosité du fluide :

Deux cas limites suivant la taille de l'objet, sa vitesse et la viscosité du fluide :

Faible vitesse, petite taille, grande viscosité : petite bille dans un fluide très visqueux.

$$\vec{f} = -\alpha \vec{v}$$

Deux cas limites suivant la taille de l'objet, sa vitesse et la viscosité du fluide :

Faible vitesse, petite taille, grande viscosité : petite bille dans un fluide très visqueux.

$$\vec{f} = -\alpha \vec{v}$$

Grande vitesse, grande taille, faible viscosité : objet macroscopique dans l'atmosphère.

$$\vec{f} = -\beta v^2 \frac{\vec{v}}{v}$$

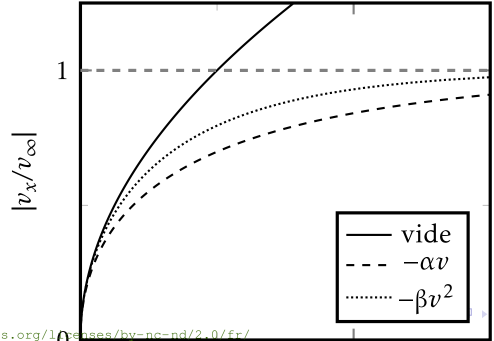
Deux cas limites suivant la taille de l'objet, sa vitesse et la viscosité du fluide :

Faible vitesse, petite taille, grande viscosité : petite bille dans un fluide très visqueux.

$$\vec{f} = -\alpha \vec{v}$$

Grande vitesse, grande taille, faible viscosité : objet macroscopique dans l'atmosphère.

$$\vec{f} = -\beta v^2 \frac{\vec{v}}{v}$$



Lancer d'un ballon

- ballon de basket dans l'air ($m = 6{,}0 \cdot 10^2\,\mathrm{g}; v_0 = 9{,}0\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$),

Lancer d'un ballon

- ballon de basket dans l'air ($m = 6{,}0 \cdot 10^2\,\mathrm{g}$; $v_0 = 9{,}0\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$),
- soumis à son poids et à la force de frottement fluide de l'air ; cas $\overrightarrow{f} = -\beta v^2 \frac{\overrightarrow{v}}{v}$

Lancer d'un ballon

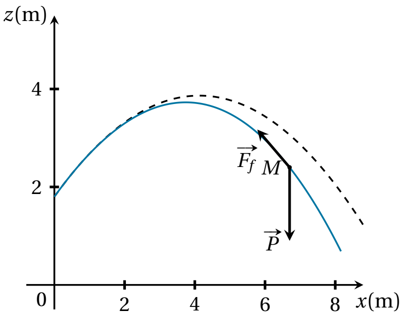
- ballon de basket dans l'air ($m = 6{,}0 \cdot 10^2$ g; $v_0 = 9{,}0$ m $\cdot$ s^{-1}),
- soumis à son poids et à la force de frottement fluide de l'air; cas $\overrightarrow{f} = -\beta v^2 \frac{\overrightarrow{v}}{v}$
- Archimède négligeable

Lancer d'un ballon

- ballon de basket dans l'air ($m = 6{,}0 \cdot 10^2\,\mathrm{g}; v_0 = 9{,}0\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$),
- soumis à son poids et à la force de frottement fluide de l'air ; cas $\overrightarrow{f} = -\beta v^2 \frac{\overrightarrow{v}}{v}$
- Archimède négligeable

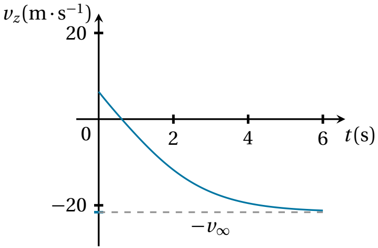
Lancer d'un ballon

- ballon de basket dans l'air ($m = 6{,}0 \cdot 10^2\,\mathrm{g}; v_0 = 9{,}0\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$),
- soumis à son poids et à la force de frottement fluide de l'air ; cas $\vec{f} = -\beta v^2 \frac{\vec{v}}{v}$
- Archimède négligeable



- intégration numérique avec python ; le cas avec $f \propto v$ se résout analytiquement mais n'est pas pertinent pour cette situation
- la flèche et la portée sont inférieures pour un même v_0 au cas sans frottement (pointillés)

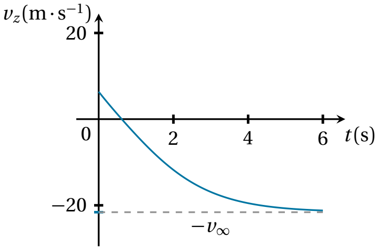
Variation avec m



ballon de basket :

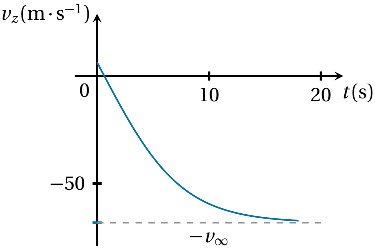
- $v_\infty \simeq 21\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$
- $\tau \simeq 2{,}2\,\mathrm{s}$

Variation avec m



ballon de basket :

- $v_\infty \simeq 21\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$
- $\tau \simeq 2{,}2\,\mathrm{s}$



ballon de basket rempli d'eau : m multipliée par 10

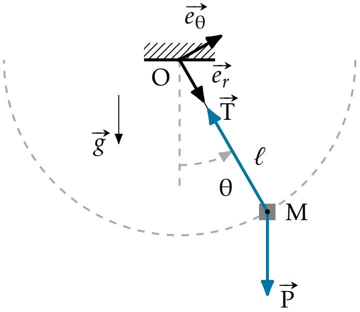
- $v_\infty = \sqrt{mg/\alpha} \rightarrow$ multipliée par $\sqrt{10}$
- $\tau = \sqrt{m/(g\alpha)}$ multipliée par $\sqrt{10}$

1. Mouvements dans le champ de pesanteur

2. Mouvement d'un pendule simple

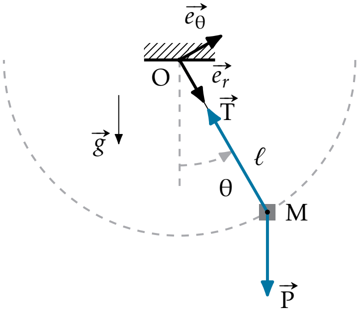
3. Frottement solide (HP)

Pendule simple



- objet de petite taille : PM M
- poids $\vec{P}$
- force de liaison $\vec{T}$: fil ou tige rigide ☠ s'assurer que le fil reste tendu (pour un fil, $\theta \leqslant \pi/2$ est une condition suffisante)
- frottement de l'air négligé

Pendule simple



- objet de petite taille : PM M
- poids $\vec{P}$
- force de liaison $\vec{T}$: fil ou tige rigide ☠ s'assurer que le fil reste tendu (pour un fil, $\theta \leqslant \pi/2$ est une condition suffisante)
- frottement de l'air négligé

on se limite au cas d'un mouvement plan vertical :

- $\vec{v}(M)(t=0) = \vec{0}$
- ou $\vec{v}(M)(t=0) \in (\overrightarrow{OM}(t=0), \vec{g})$
- circulaire → coordonnées polaires (un seul degré de liberté)

Loi de la quantité de mouvement

Équation différentielle d'un pendule simple

L'angle θ par rapport à la verticale d'un pendule simple vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \quad \text{avec : } \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

Loi de la quantité de mouvement

Équation différentielle d'un pendule simple

L'angle θ par rapport à la verticale d'un pendule simple vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \quad \text{avec : } \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

- ω_0 est une pulsation

Loi de la quantité de mouvement

Équation différentielle d'un pendule simple

L'angle θ par rapport à la verticale d'un pendule simple vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \quad \text{avec : } \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

- ω_0 est une pulsation
- équadiff non linéaire : pas de résolution analytique générale

Loi de la quantité de mouvement

Équation différentielle d'un pendule simple

L'angle θ par rapport à la verticale d'un pendule simple vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \quad \text{avec : } \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

- ω_0 est une pulsation
- équadiff non linéaire : pas de résolution analytique générale
- grâce aux polaires : seule l'équation sur $\vec{e_\theta}$ est nécessaire

Loi de la quantité de mouvement

Équation différentielle d'un pendule simple

L'angle θ par rapport à la verticale d'un pendule simple vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2\sin\theta=0 \quad \text{avec : } \omega_0^2=\frac{g}{l}.$$

- ω_0 est une pulsation
- équadiff non linéaire : pas de résolution analytique générale
- grâce aux polaires : seule l'équation sur $\vec{e_\theta}$ est nécessaire
- l'équation sur $\vec{e_r}$ donne le module de $\vec{T}$, pour vérifier qu'elle ne s'annule pas, *ie* que le fil reste tendu : en particulier le fil ne peut se détendre que pour $\theta>\pi/2$

Linéarisation de l'équation différentielle

si $\theta \ll 1$, $\sin\theta \simeq \theta$:

Oscillations de faible amplitude d'un pendule simple

Le mouvement de faible amplitude d'un pendule simple est harmonique de période $T_0 = 2\pi/\omega_0$, indépendante de l'amplitude. Ces oscillations sont dites isochrones.

Linéarisation de l'équation différentielle

si $\theta \ll 1$, $\sin\theta \simeq \theta$:

Oscillations de faible amplitude d'un pendule simple

Le mouvement de faible amplitude d'un pendule simple est harmonique de période $T_0 = 2\pi/\omega_0$, indépendante de l'amplitude. Ces oscillations sont dites isochrones.

- $T_0 \simeq 2\,\mathrm{s}$ pour $l = 1\,\mathrm{m}$

Linéarisation de l'équation différentielle

si $\theta \ll 1$, $\sin\theta \simeq \theta$:

Oscillations de faible amplitude d'un pendule simple

Le mouvement de faible amplitude d'un pendule simple est harmonique de période $T_0 = 2\pi/\omega_0$, indépendante de l'amplitude. Ces oscillations sont dites isochrones.

- $T_0 \simeq 2\,\mathrm{s}$ pour $l = 1\,\mathrm{m}$
- oscillation entre $-\theta_0$ et θ_0 si $\dot{\theta}_0 = 0$: $\theta \ll 1$ si $\theta_0 \ll 1$

Linéarisation de l'équation différentielle

si $\theta \ll 1$, $\sin\theta \simeq \theta$:

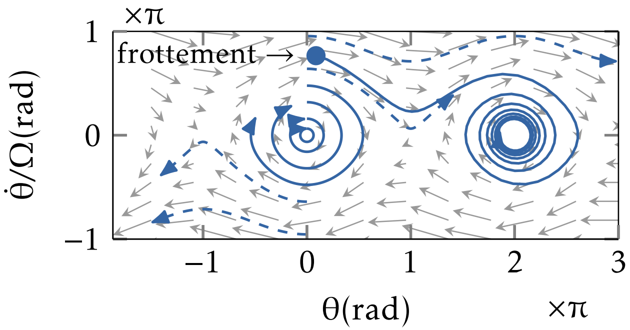
Oscillations de faible amplitude d'un pendule simple

Le mouvement de faible amplitude d'un pendule simple est harmonique de période $T_0 = 2\pi/\omega_0$, indépendante de l'amplitude. Ces oscillations sont dites isochrones.

- $T_0 \simeq 2\,\mathrm{s}$ pour $l = 1\,\mathrm{m}$
- oscillation entre $-\theta_0$ et θ_0 si $\dot{\theta}_0 = 0$: $\theta \ll 1$ si $\theta_0 \ll 1$
- utilisation comme horloge

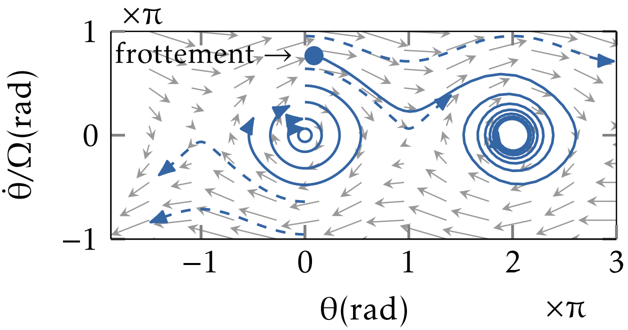
Intégration numérique

- lancé de $\theta = 0$ avec différentes $\dot{\theta}_0$



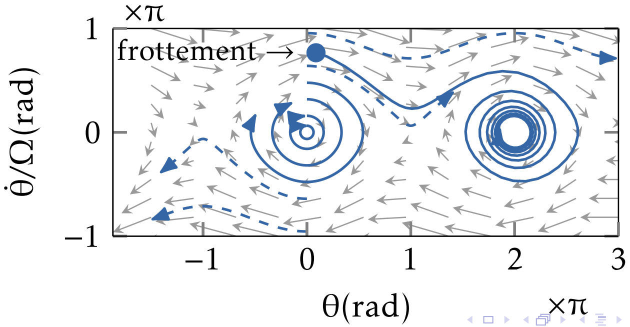
Intégration numérique

- lancé de $\theta = 0$ avec différentes $\dot{\theta}_0$
- oscillations périodiques si $\dot{\theta}_0$ est assez faible, mouvement révolutif non périodique sinon



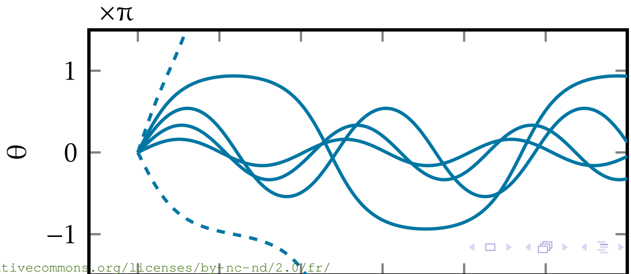
Intégration numérique

- lancé de $\theta = 0$ avec différentes $\dot{\theta}_0$
- oscillations périodiques si $\dot{\theta}_0$ est assez faible, mouvement révolutif non périodique sinon
- la courbe marquée « frottement » correspond à un mouvement en présence de frottement (en v^2), la durée totale d'intégration a été multipliée par 8



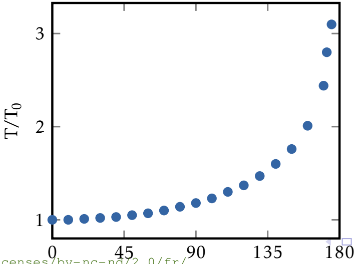
Intégration numérique

- oscillations périodiques si $\dot{\theta}_0$ est assez faible, mouvement révolutif non périodique sinon
- la courbe marquée « frottement » correspond à un mouvement en présence de frottement (en v^2), la durée totale d'intégration a été multipliée par 8
- même durée d'intégration T_0 : période des mouvements oscillants augmente avec $\dot{\theta}_0$

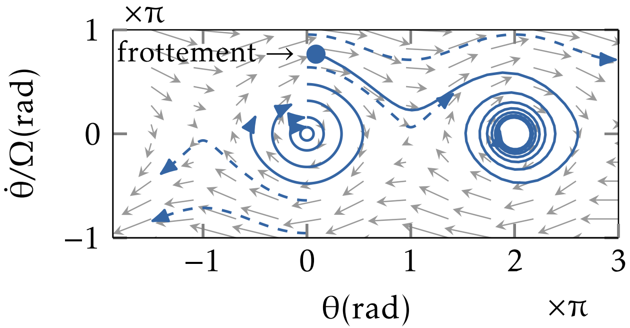


Intégration numérique

- oscillations périodiques si $\dot{\theta}_0$ est assez faible, mouvement révolutif non périodique sinon
- la courbe marquée « frottement » correspond à un mouvement en présence de frottement (en v^2), la durée totale d'intégration a été multipliée par 8
- même durée d'intégration T_0 : période des mouvements oscillants augmente avec $\dot{\theta}_0$



Intégration numérique



on peut tracer analytiquement ce portrait de phase (avec l'énergie) pour le cas sans frottement, mais il faut une intégration numérique pour prendre en compte des frottements

1. Mouvements dans le champ de pesanteur

2. Mouvement d'un pendule simple

3. Frottement solide (HP)

Lois d'Amontons et de Coulomb

Les lois phénoménologiques d'Amontons[1] et de Coulomb[2] décrivent les forces de contact entre deux solides. Soit M un point matériel en contact avec un support solide et notons $\vec{v}_g$ la vitesse de glissement de M par rapport au solide.

Il existe un coefficient de frottement μ, sans dimension tel que :

Frottement statique Il ne peut y avoir équilibre relatif ($\vec{v}_g = \vec{0}$) que si la norme $R_{||}$ de la force de frottement nécessaire pour l'assurer vérifie :

$$\frac{R_{||}}{R_{\perp}} \leqslant \mu.$$

Frottement cinétique S'il y a glissement, l'intensité de la force de frottement est $R_{||} = \mu R_{\perp}$.

[1] G. Amontons, physicien français (1663–1705).

[2] C. de Coulomb, physicien français (1736–1806).

- μ indépendant des aires en contact, de la vitesse de glissement. Typiquement : $\mu = 0,2$ pour acier/acier, $\mu = 0,6$ pour caoutchouc/bitume.

- μ indépendant des aires en contact, de la vitesse de glissement. Typiquement : $\mu = 0,2$ pour acier/acier, $\mu = 0,6$ pour caoutchouc/bitume.
- $R_\perp$ a pour origine l'impénétrabilité de la matière, $R_{||}$ la rugosité des irrégularités des surfaces en contact.

- μ indépendant des aires en contact, de la vitesse de glissement. Typiquement : $\mu = 0,2$ pour acier/acier, $\mu = 0,6$ pour caoutchouc/bitume.
- $R_\perp$ a pour origine l'impénétrabilité de la matière, $R_{||}$ la rugosité des irrégularités des surfaces en contact.
- Il existe en fait 2 coefficients μ_s (statique) et μ_c (cinétique), avec $\mu_s \geqslant \mu_c$.

- μ indépendant des aires en contact, de la vitesse de glissement. Typiquement : $\mu = 0,2$ pour acier/acier, $\mu = 0,6$ pour caoutchouc/bitume.
- $R_\perp$ a pour origine l'impénétrabilité de la matière, $R_{||}$ la rugosité des irrégularités des surfaces en contact.
- Il existe en fait 2 coefficients μ_s (statique) et μ_c (cinétique), avec $\mu_s \geqslant \mu_c$.
- http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/frotte2.html

Intégration des équations du mouvement I

```
import numpy as np
import scipy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
def eqdiff(w, t):
    x,z,vx,vz,t = w
    # dx|z/dt = vx|vz
    # dvx/dt = -alpha*vx*sqrt(vx^2+vz^2)/masse
    # dvz/dt = -alpha*vz*sqrt(vx^2+vz^2)/masse-g
    return [vx,vz,-alpha*vx*np.sqrt(vx**2+vz**2)/masse,
            -alpha*vz*np.sqrt(vx**2+vz**2)/masse-g,1]

masse = 0.6 #kg
rayon = 0.12 #m
rho = 1.19e0 #kg/m^3
eta = 1.86e-5 #Po
nu = eta/rho#m^2/s (viscosite cinematique)
C = 0.47
g = 9.81

alpha = 0.5*rho*C*(np.pi*rayon**2)

# vitesse initiale: module
v0 = 9.
```

Intégration des équations du mouvement II

```
# vitesse initiale: angle en degres
gamma = 45*np.pi/180.
# Conditions initiales (x,z en m)
x0,z0 = 0.,1.8
#Conditions initiales (vx|vz en m/s)
vx0 = v0 * np.cos(gamma)
vz0 = v0 * np.sin(gamma)
# Date de fin et nombre de pas d'integration
datefin, numpoints = 2, 250
t = np.linspace(0, datefin, numpoints)
# Conditions initiales
w0 = [x0,z0,vx0,vz0,0]
# Resolution numerique de l'equation differentielle
wsol = odeint(eqdiff, w0, t)

x = wsol[:,0]; z = wsol[:,1]; vx = wsol[:,2]; vz = wsol[:,3]

# Trajectoire
plt.plot(x, z, 'b-')
plt.legend()
plt.ylabel('z')
plt.xlabel('x')
plt.show()
```

Trajectoire dans l'espace des phases I

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(Z, t):
    theta,v  = Z
    return [v, -np.sin(theta)]

thetamin, thetamax = -1.5*np.pi,3.5*np.pi
NpointsTheta = 20
thetaNoeuds = np.linspace(thetamin, thetamax, NpointsTheta)
vmin, vmax = -1.5*np.pi,1.5*np.pi
NpointsV = 20
vNoeuds = np.linspace(vmin, vmax, NpointsV)
thetaGrille,vGrille = np.meshgrid(thetaNoeuds, vNoeuds)

t = 0

#initialisation
xFleche, yFleche = np.zeros(thetaGrille.shape), np.zeros(vGrille.shape)

Ntheta, Nv = thetaGrille.shape

for i in range(Ntheta):
    for j in range(Nv):
```

Trajectoire dans l'espace des phases II

```
        theta = thetaGrille[i, j]
        v = vGrille[i, j]
        Deriv = f([theta, v], t)
        xFleche[i,j] = Deriv[0]
        yFleche[i,j] = Deriv[1]


Q = plt.quiver(thetaGrille, vGrille, xFleche, yFleche, color='r')

plt.xlabel('$\theta$')
plt.ylabel('$\dot{\theta}/\omega_0$')
plt.xlim([thetamin, thetamax])
plt.ylim([vmin, vmax])


# Trace des trajectoires
from scipy.integrate import odeint
tmin = 0
tmax = 2*np.pi
tPoints = 200
hmin = 0
for v0 in [-3,-2.01, .5, 1, 1.5, 2.01,3]:
    tIntervalle = np.linspace(tmin, tmax,tPoints)
    Origine = [hmin, v0]
```

Trajectoire dans l'espace des phases III

```
    Solution = odeint(f, Origine, tIntervalle)
    plt.plot(Solution[:,0], Solution[:,1], 'b-') # courbe
    plt.plot([Solution[0,0]], [Solution[0,1]], 'o') # debut
    plt.plot([Solution[-1,0]], [Solution[-1,1]], 's') # fin
plt.xlim([thetamin, thetamax])
plt.show()
```

Indispensable

Tout